Chapitres 20 et 21 : probabilités générales - variables aléatoires discrètes
Feuille d'exercices supplémentaires

Exercice 1 (ESCP2012) On cherche à évaluer le nombre N de lions d'Asie, espèce en voie de disparition, dans le parc sanctuaire faunique de Gir (Inde).

Pour cela, on capture d'abord, en une seule fois, m lions (avec $m \in \mathbb{N}^*$) que l'on tatoue avant de les relâcher dans la nature. On admet que pendant toute la durée de l'étude il n'y a ni décès ni naissance.

On effectue ensuite un comptage des animaux tatoués en capturant des lions un par un, au hasard et avec remise en liberté après chaque capture.

On utilise l'une des deux méthodes suivantes.

1. Première méthode

Pendant la période de comptage, on capture exactement $\boldsymbol{n}$ lions (où $\boldsymbol{n}$ est un nombre entier naturel non nul, de taille raisonnable, fixé à l'avance). On note Y_n le nombre de lions tatoués parmi eux.

1. Donner la loi de Y_n.
2. À l'aide d'un argument de proportionnalité, expliquer intuitivement pourquoi on devrait avoir l'approximation :
$$N \approx \frac{nm}{Y_n}$$
Pourquoi n'a-t-on pas le droit mathématiquement d'utiliser la variable $\dfrac{nm}{Y_n}$ pour estimer N ?
3. On pose :
$$B_n = m\frac{n+1}{Y_n+1}$$
   a) Démontrer que :
$$E(B_n) = N\left[1-\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n+1}\right]$$
   b) En déduire la valeur asymptotique de $E(B_n)$ si l'on fait l'approximation que n est grand (i.e. $n \longrightarrow +\infty$).

2. Seconde méthode

Pendant la période de comptage, on capture autant de lions que nécessaire jusqu'à obtenir n lions tatoués (là aussi n est un nombre entier naturel non nul, de taille raisonnable, fixé à l'avance). On note X_n le nombre de lions (tatoués ou non) ainsi capturés.

1. On note D_1 le nombre de lions capturés jusqu'au premier lion tatoué (celui-ci y compris). On note D_2 le nombre de lions capturés entre le premier lion tatoué (non compris) et le deuxième lion tatoué (y compris). Ainsi de suite, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, D_k désigne le nombre de lions capturés entre le $k-1$-ème lion tatoué (non compris) et le k-ème lion tatoué (y compris). On admet que les variables $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sont indépendantes.
   a) Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, donner la loi de D_k.
   b) En déduire l'espérance et la variance de X_n.
2. À l'aide d'un argument de proportionnalité, expliquer intuitivement pourquoi on devrait avoir l'approximation :
$$N \approx \frac{mX_n}{n}$$

3. On pose :
$$A_n = \frac{mX_n}{n}$$
   a) Calculer l'espérance et la variance de A_n.
   b) Quelle est la valeur asymptotique de $\mathrm{V}(A_n)$ si l'on fait l'approximation que n est grand (i.e. $n \longrightarrow +\infty$) ?

Exercice 2 Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dite « paire en fréquence » (en abrégé PF) lorsque :
$$\mathrm{P}(\text{« } X \text{ prend une valeur paire »}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

À toute variable aléatoire X (à valeurs dans $\mathbb{N}$), on associe sa partie paire $\bar{X}$ qui est la variable aléatoire définie par :
$$\bar{X} = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ prend une valeur paire,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit alors que X est « paire en moyenne » (en abrégé PM) lorsque :
$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}) \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{E}(\mathrm{X}).$$

1. Démontrer qu'une variable aléatoire X qui suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0;1[$ n'est ni PF ni PM.
2. Dans cette question, la variable X suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p \in]0;1[$.
   a) Démontrer que X est PF mais n'est pas PM.
   b) Soit Y une variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{N}$) dont la densité est décroissante. On pose $a = P($ « Y prend une valeur paire ») et $b = P($ « Y prend une valeur impaire »). En étudiant le signe de $a - b$, démontrer que Y est PF. Retrouver ainsi que X est PF.
3. Dans cette question, la variable X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0;+\infty[$. On pose $a = P($ « X prend une valeur paire ») et $b = P($ « X prend une valeur impaire »).
   a) Calculer $a - b$ et en déduire les valeurs de a et b.
   b) Justifier que X est PF mais n'est pas PM.

Exercice 3 On est en voiture au départ d'une rue infiniment longue et à sens unique. On doit se rendre à un point d'arrivée situé à une certaine distance du point de départ et on cherche à se garer le plus près possible de l'arrivée. À partir d'où doit-on commencer à accepter une place libre ?

Au départ, on est au numéro 0 de la rue. Pour chaque entier naturel n, il y a une place de parking au numéro n, qui peut être libre avec la probabilité $p \in]0;1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations de places se font indépendamment les unes des autres.

L'arrivée est au numéro a.

On adopte la stratégie suivante : on se donne $m \in [\![0;a]\!]$ et on conduit sans s'arrêter jusqu'au numéro m de la rue. On accepte alors la première place libre à partir du numéro m (inclus).

On note X_m le numéro de la place où l'on s'est garé par cette méthode.

1. Déterminer la loi de $X_m - m$ et donner l'espérance de X_m.
2. Interpréter $d_m = E(|X_m - a|)$ et démontrer que
$$d_m = a - m - \frac{1-p}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{a-m+1}$$
3. Étudier les variations de la suite (d_m) et en déduire la valeur optimale de m (c'est-à-dire la valeur de m pour laquelle d_m est minimale).
4. Que peut-on dire lorsque $p \geqslant 1/2$?

Exercice 4 Une urne contient une boule blanche, une boule verte et une boule noire. On effectue une suite de tirages indépendants avec remise.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées quand apparaît, pour la première fois, une deuxième couleur. Par exemple, toutes les suites de tirages commençant par NNB donnent $X = 3$.

   Déterminer la loi de $X - 1$ et en déduire l'espérance de X.

2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées quand apparaît, pour la première fois, la troisième couleur. Par exemple, toutes les suites de tirages commençant par NNBNV donnent $X = 3$ et $Y = 5$.

   a) Soient $k, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \geqslant 3$ et $2 \leqslant k \leqslant m-1$. Déterminer la probabilité $P_{X=k}(Y = m)$.

   b) En déduire la loi de probabilité de Y et l'espérance de Y.

Exercice 5 On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

— on commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne) et l'on note N le nombre de tirages effectués ;

— puis on réalise N nouveaux tirages dans l'urne, toujours avec remise, et l'on note X le nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire N.

2. a) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   b) En déduire la loi de X. On calculera $P(X = 0)$ puis $P(X = k)$ pour $k \geqslant 1$. On pourra utiliser que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1; 1[$, on a l'égalité

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

   c) Calculer, si elle existe, l'espérance de X.

Exercice 6 Une roue de loterie est composée de N numéros distincts où $N \geqslant 1$. Un seul numéro sort à chaque partie. Les parties sont supposées indépendantes. Pour tout $r \in [\![1; N]\!]$, on appelle S_r la variable aléatoire égale au nombre de parties nécessaires pour obtenir r numéros différents. Ainsi S_1 est la variable aléatoire certaine de valeur 1. Pour tout $k \in [\![1; N-1]\!]$, on pose $X_k = S_{k+1} - S_k$.

1. Soit $k \in [\![1; N-1]\!]$.

   a) Pour $i \geqslant k$, déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $(S_k = i)$.

   b) Déterminer la loi de X_k, son espérance et sa variance.

2. En admettant que les variables aléatoires X_k sont indépendantes, déterminer l'espérance et la variance de S_N. En trouver des équivalents quand $N \longrightarrow +\infty$.

   On admettra que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.

3. Démontrer que les X_k sont indépendantes.

Exercice 7 Une urne opaque contient deux boules blanches, numérotées 1 et 2, et une boule rouge. À chaque tour, un joueur tire l'une des trois boules. Si la boule blanche numérotée 1 sort, il gagne 1 €, si la boule blanche numérotée 2 sort, il gagne 2 € et si la boule rouge sort, le jeu s'arrête (on effectue donc une suite de tirages avec remise jusqu'à l'apparition de la boule rouge).

On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées et G la variable égale au gain du joueur (c'est-à-dire la somme des numéros des boules blanches obtenues).

1. Déterminer la loi de N.

2. Soit $n \geqslant 0$. On note D la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule blanche numéro 2 est sortie. Déterminer la loi conditionnelle de D sachant que n boules blanches sont sorties. En déduire l'espérance conditionnelle de G sachant $(N = n)$, que l'on notera $E_{N=n}(G)$.

3. Démontrer que $E(G) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) E_{N=n}(G)$ et en déduire l'espérance de gain.

Exercice 8 (Processus de renouvellement discret) On considère une machine pouvant être dans deux états : « marche » ou « panne ». Chaque jour, cette machine tombe en panne avec une probabilité $p \in]0,1[$. On considère que dès qu'elle est en panne, elle est instantanément réparée. On note par X_n l'état de la machine à la date $n \geqslant 1$:

— $X_n = 0$ si la machine est en état de marche,

— $X_n = 1$ si la machine est en panne.

Les variables aléatoires X_n sont indépendantes deux à deux. On note N_n le nombre de fois que la machine est tombée en panne jusqu'à l'instant n, c'est-à-dire $N_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Enfin, on note T_k le k-ème instant de panne, c'est-à-dire que T_k est l'instant où la machine tombe pour la k-ème fois en panne.

1. Quelle est la loi de X_n et de N_n ?
2. Déterminer la loi de T_1.
3. a) Déterminer la loi de la variable $T_2 - T_1$ et démontrer qu'elle est indépendante de T_1.
   b) En déduire la loi de T_2.
4. Exprimer l'événement $\{T_k = i\}$ en fonction des variables aléatoires N_j et X_j. En déduire la loi de T_k et comparer avec le 3.

Exercice 9 On lance une infinité de fois une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0;1[$. On note X le nombre de faces obtenues jusqu'à l'obtention du deuxième pile. On choisit alors au hasard un nombre Y entre 1 et $X+1$. Enfin, on pose $Z = X - Y + 1$.

1. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$ si elle existe.
2. Déterminer la loi de Y et donner $E(Y)$.
3. Donner la loi de Z et justifier que Y et Z sont indépendantes.

Exercice 10 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = 2k) = 0 \quad \text{et} \quad P(X = 2k+1) = \frac{1}{\varphi^{2k+1}}$$

1. Déterminer φ.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 11 Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu selon les règles que voici. A joue le premier et jette deux dés ; si la somme des points obtenus vaut 5, alors A gagne et le jeu s'arrête. Sinon, B joue à son tour et jette deux dés ; si la somme des points obtenus vaut 7, alors B gagne et le jeu s'arrête. Sinon, le tour revient à A et on continue comme ci-dessus jusqu'à ce que l'un des deux joueurs ait gagné. Chaque jet est indépendant des autres.

1. Calculer la probabilité, en lançant deux dés, que la somme des points soit égale à 5 ; à 7.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité que A gagne au $(2n+1)$-ème jet des deux dés ; que B gagne au $(2n+2)$-ème jet.
3. Calculer les probabilités a et b que A et B gagnent respectivement la partie. Que vaut $a+b$? Que peut-on en déduire ?
4. On note X le nombre de coups joués au moment où la partie prend fin. Déterminer la loi de X et son espérance (si elle existe).

Exercice 12 Un insecte pond des œufs, dont le nombre N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque œuf a une probabilité p d'éclore (et l'éclosion d'un œuf est indépendante de celle des autres). On note X la variable aléatoire égale au nombre d'insectes nés.

Étudier la loi et l'espérance de X.

Exercice 13 Les pandas étant en voie de disparition, on souhaite leur créer une réserve naturelle. Pour cela, on prélève, de façon indépendante, des individus dans la nature, avec une probabilité p de capturer un mâle et une probabilité $q = 1 - p$ de capturer une femelle.

Pour optimiser les chances de reproduction dans la réserve tout en limitant au maximum l'impact de ces prélèvements, on s'arrête dès que l'on a obtenu r couples de pandas (c'est-à-dire « exactement r mâles et au moins r femelles » ou « exactement r femelles et au moins r mâles »).

On note alors X le nombre de pandas capturés. On admet qu'il est évidemment quasi-impossible de capturer une infinité de pandas, ce qui implique que X est une variable aléatoire réelle.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et démontrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$, on a

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \left(p^r q^{k-r} + p^{k-r} q^r\right)$$

Indication : on pourra utiliser les événements M_k (resp. F_k) « le k-ème panda capturé est un mâle (resp. une femelle) ».

2. On suppose dorénavant que $p = q$.
   a) Justifier que

$$\sum_{k=2r}^{+\infty} \binom{k-1}{r-1} \frac{1}{2^{k-1}} = 1$$

   b) Calculer $E(X)$.

Exercice 14 Un commerçant sur internet se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock au début de la saison. Il achète n exemplaires du bien de consommation qu'il commercialise.

Chaque unité vendue lui rapporte un bénéfice de β € alors que chaque invendu, à la fin de la saison, engendre une perte de π €.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'unités qui seront commandées à ce commerçant en ligne, pendant la saison. On fait l'hypothèse que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. En particulier, on a $P(X = 0) = 0$.

On considère en outre la variable aléatoire S_n qui indique si le stock est suffisant : S_n vaut 1 si $X \leqslant n$ et vaut 0 sinon.

Enfin, on note G_n le gain (positif ou négatif) du commerçant à la fin de la saison. On souhaite bien évidemment optimiser la valeur de n afin de maximiser l'espérance du gain G_n.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$G_n = (X\beta - (n - X)\pi)S_n + n\beta(1 - S_n)$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la loi de X, déterminer la loi de S_n et donner l'expression de $E(S_n)$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la loi de X, déterminer la loi de XS_n et donner l'expression de $E(XS_n)$ sous forme d'une somme.
   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$E(G_n) = (\beta + \pi) \sum_{k=1}^{n} (k - n)P(X = k) + n\beta$$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $E(G_{n+1}) - E(G_n)$ en fonction de β, π et $P(X \leqslant n)$.
   b) Démontrer qu'il existe un unique entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$P(X \leqslant n_0 - 1) < \frac{\beta}{\beta + \pi} \leqslant P(X \leqslant n_0)$$

   c) En déduire que le commerçant maximise son espérance de gain avec un stock de taille n_0.